Ejercicio 1: Si la temperatura de un depósito cilíndrico viene dada por la función $T(x,y,z) = 10(xe^{-y^2} + ze^{-x^2})$ y nos situamos en el punto de coordenadas (0,0,1), determinar en qué dirección y sentido debemos movernos para que la temperatura disminuya lo más rápidamente posible. ¿Y para que aumente?

Solución: La dirección y sentido de máximo crecimiento de la función $T(x,y,z)$ en un punto $a = (x,y,z)$, es decir, la dirección y sentido en la que aumenta más rápidamente la temperatura, es en la dirección y sentido del vector gradiente en ese punto, $\nabla f(a)$, y la dirección y sentido en la que la temperatura disminuye más rápidamente es en la dirección y sentido opuesto, $-\nabla f(a)$. Por tanto calculamos el vector $\nabla f(a)$:

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a), \frac{\partial f}{\partial z}(a)\right)$$

donde $a = (0,0,1)$.

Necesitamos obtener primero las derivadas parciales:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 10(e^{-y^2} - 2xze^{-x^2})$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 10(-2xye^{-y^2})$,

$\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 10(e^{-x^2})$.

En el punto a = (0,0,1) se tiene que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = 10$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(a) = 10$.

Por tanto, $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{a}) = (\mathbf{10}, \mathbf{0}, \mathbf{10})$, que es la dirección y sentido en la que debemos movernos para que la temperatura aumenta más rápidamente, y debemos movernos en la dirección y sentido $-\nabla \mathbf{f}(\mathbf{a}) = (-\mathbf{10}, \mathbf{0}, -\mathbf{10})$ para que la temperatura disminuya más rápidamente.

Ejercicio 2: Resolver la ecuación diferencial $y' = \cos 2x\,\sqrt{y+1}$, sujeta a la condición inicial $y(0) = 3$.

Solución: Esta ecuación se puede escribir de la forma, $y'g(y) = f(x)$, donde $g(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y+1}}$ y $f(x) = \cos 2x$, por lo que es una ecuación de variables separadas. Entonces obtendremos la solución resolviendo la siguiente igualdad $\int g(y)dy = \int f(x)dx$:

$$\int g(y)\,dy = \int \frac{1}{\sqrt{y+1}}\,dy = \int (y+1)^{-1/2}\,dy = 2\sqrt{y+1} + C_1$$

$$\int f(x)\,dx = \int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int 2\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2x + C_2$$

por tanto,

$$2\sqrt{y+1} + C_1 = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2x + C_2$$

de donde se deduce que $\sqrt{y+1} = \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2x + C$, y puesto que $y(0) = 3$, es decir, la curva solución debe pasar por el punto $x = 0$ e $y = 3$, se tiene que:

$$\sqrt{3+1} = \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,0 + C \Rightarrow C = 2$$

Así,

$$\sqrt{y+1} = \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2x + 2$$

o

$$y = \left(\frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2x + 2\right)^2 - 1$$

Ejercicio 3: Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales, dependiente de un parámetro a:

$$\left\{\begin{array}{ccc} x - 2y + z & = & 1 \\ x - y + 2z & = & 1 \\ x + (a-2)y + (a+1)z & = & a+1 \end{array}\right.$$

Discutir el sistema según los diferentes valores de a y resolver cuando sea posible.

Solución: Para discutir la compatibilidad del sistema aplicamos el teorema de Rouché-Fröbenius. Necesitamos obtener el rango de la matriz de coeficientes y el de la ampliada, para lo que utilizando el método de Gauss:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & a-2 & a+1 & a+1 \end{array}\right) \begin{array}{l} f_1 = f_1 \\ f_2 = f_2 - f_1 \\ f_3 = f_3 - f_1 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & a & a \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} f_1 = f_1 \\ f_2 = f_2 \\ f_3 = f_3 - af_2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right).$$

La condición necesaria y suficiente para que el sistema sea COMPATIBLE es que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B)$.

Puesto que $\text{rg}(A) = 2$, debe cumplirse también que $\text{rg}(A|B) = 2$, para lo que $a = 0$.

Por tanto:

- Si $a \neq 0$, $\text{rg}(A) = 2 \neq \text{rg}(A|B) = 3$ y el sistema es INCOMPATIBLE.

- Si $a = 0$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 2$ y el sistema es COMPATIBLE E INDETERMINADO, ya que $2 = \text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) <$ número de incógnitas $= 3$. Así, existen infinitas soluciones dependiendo de un parámetros (número de incógnitas menos el rango).

Entonces resolvemos para $a = 0$:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

La matriz obtenida es la matriz ampliada de un sistema equivalente al inicial:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - 2y + z & = & 1 \\ y + z & = & 0 \end{array}\right.$$

Se resuelve este sistema:

Despejando en cada ecuación se tiene $x = 1 - 3z$ e $y = -z$.

La solución del sistema, para $a = 0$, es:

$$\left\{\begin{array}{rclr} x & = & 1 & -3\lambda \\ y & = & & -\lambda \\ z & = & & \lambda \end{array}\right.$$

para $\lambda \in I\!R$.

Ejercicio 4: Un almacén tiene en stock cajas de leche de dos marcas A y B. Se sabe que la cuarta parte de las cajas que tiene almacenadas son de la marca A y que el 8 % de las cajas de la marca A y el 24 % de las cajas de la marca B están en mal estado. Calcular el porcentaje de cajas de leche almacenadas que están en mal estado.

Solución:

Denotamos por:

$A =$ la caja es de la marca A

$M =$ la caja está en mal estado

Entonces se tiene que

$p(A) = 0,25 \Rightarrow p(B) = p(\overline{A}) = 1 - 0,25 = 0,75$, $p(M|A) = 0,08$ y

$p(M|B) = 0,24$.

Se pide $p(M)$, para lo que utilizamos el Teorema de la probabilidad total:

$p(M) = p(A)p(M|A) + p(B)p(M|B) = 0,25 \cdot 0,08 + 0,75 \cdot 0,24 = \mathbf{0,2}$.

Por tanto, el 20 % de las cajas de leche almacenadas están en mal estado.